Singularitäten in der FEM und deren Bewertung

Jeder FEM-Anwender wird früher oder später mit Spannungssingularitäten konfrontiert werden, sich dessen aber nicht unbedingt im Klaren sein. Dafür gibt es primär zwei Gründe: zum einen erfordert die Erkennung einer Singularität entsprechende Erfahrung und zum anderen wird in der Fachliteratur nur ansatzweise darauf eingegangen.

Allgemein bezeichnet eine Singularität einen Punkt, an dem eine definierte Eigenschaft nicht vorhanden ist. In der Mathematik kommen unterschiedliche Arten von Singularitäten vor, von denen die beiden folgenden für die FEM relevant sind:

- Ist eine Funktion in einem Punkt nicht definiert, kann ansonsten jedoch stetig fortgesetzt werden, dann spricht man von hebbarer Singularität, z.B. $f(x)=\sin x/x$ bei $x=0$.
- Strebt eine Funktion in der Nähe der Singularität gegen Unendlich, dann liegt eine Polstelle vor, z.B. $f(x)=1/x$ bei $x=0$

Der zweite Fall tritt in der FEM z.B. in folgenden Situationen auf:

- eine Struktur ist nur an einem Knoten gelagert
- die Gesamtlast wird lediglich auf einen Knoten aufgebracht
- ein Kontaktkörper kommt punktförmig mit dem Kontaktpartner in Kontakt

In diesen Fällen strebt die Fläche gegen Null und bei entsprechend feiner Diskretisierung ergeben sich unendlich hohe Spannungen. Dieses Verhalten ist auch für unerfahrene Anwender offensichtlich und interpretierbar. Es gibt jedoch eine ganze Reihe von Fällen wo ähnliche Effekte auftreten, jedoch leicht übersehen werden können.

Beispiel 1: Kragträger mit Querkraft

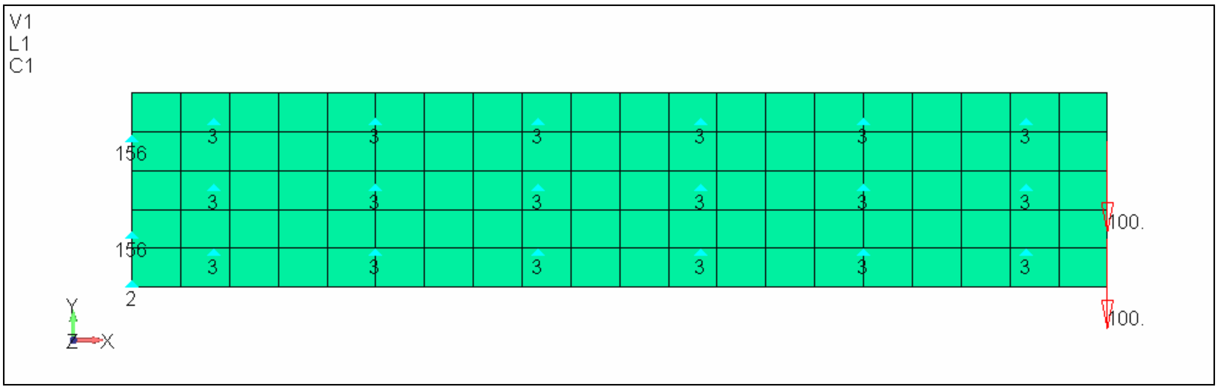

Abbildung 1: FE-Modell Kragträger

Die Abmessungen des Kragträgers betragen 50x10x1 mm, das Material ist Stahl und es soll eine linear-elastische Analyse durchgeführt werden. Auf der rechten Seite ist eine Querkraft von 100 N angebracht und das linke Ende mit Symmetriebedingungen versehen. Ferner ist die Verschiebung in der Ebene unterdrückt und der Knoten links unten in Ty gelagert. Gesucht sind die max. Verschiebungen und Spannungen. Um die Genauigkeit der Analyse zu verifizieren soll eine Konvergenzbetrachtung mit zwei Netzen höherer Diskretisierung durchgeführt werden.

Auf den ersten Blick erscheint die Lösung trivial und die Verschiebungen lassen sich ohne Probleme bestimmen. Bei näherer Betrachtung stellt man jedoch eine Singularität entsprechend dem oben genannten Fall zwei fest.

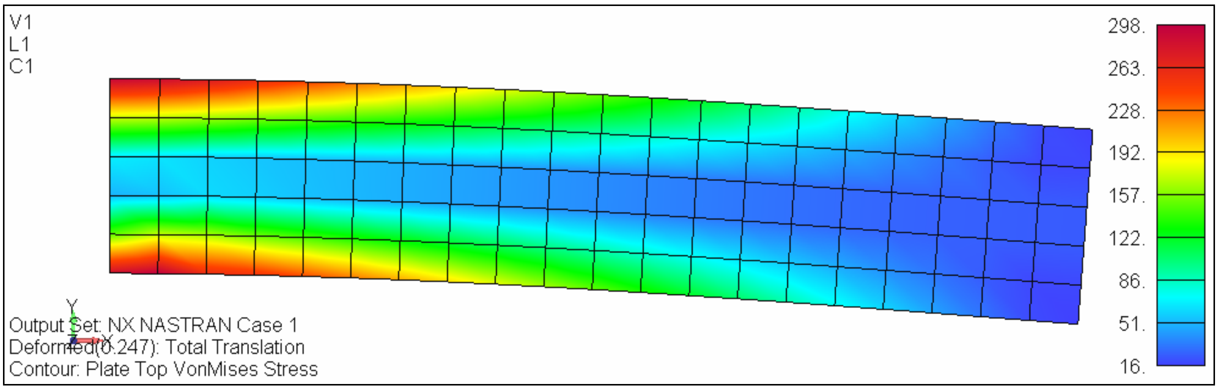

Abbildung 2: Kragträger, Ergebnisse geringe Netzdichte (100 Elemente)

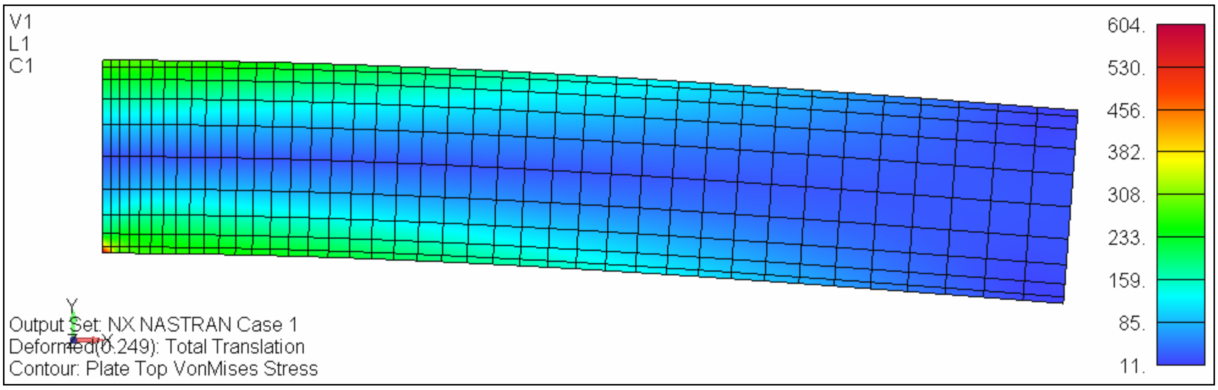

Abbildung 3: Kragträger, Ergebnisse, mittlere Netzdichte (400 Elemente)

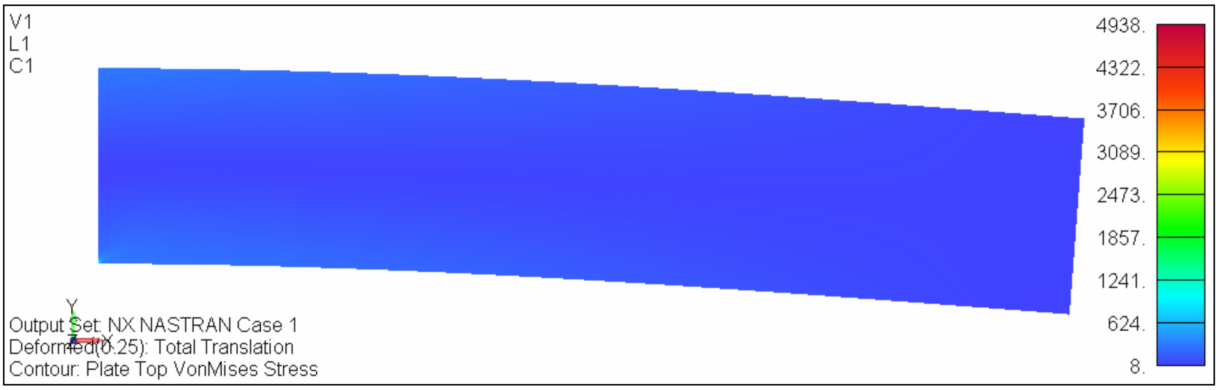

Abbildung 4: Kragträger, Ergebnisse, hohe Netzdichte (25.000 Elemente)

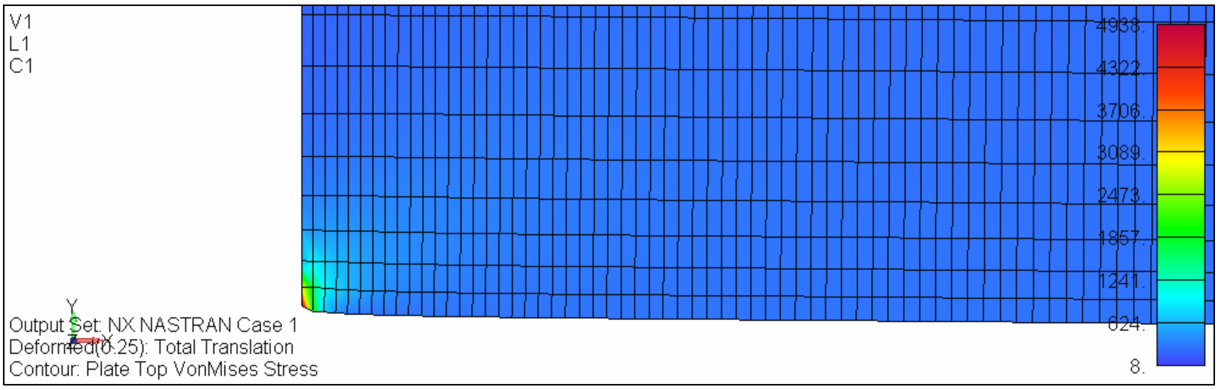

Abbildung 5: Detailansicht Kragträger, Modell mit hoher Netzdichte

Die Spannungen konvergieren nicht, da die gesamt Querkraft über einen einzigen Knoten abgetragen werden muss. Es ergibt sich daher der gleiche Effekt, als wenn eine konzentrierte Einzellast eingeleitet werden würde. Dieses Beispiel macht deutlich, dass die Erhöhung der Netzdichte in derartigen Fällen keine Lösung ist. In der Realität gibt es keine Auflager mit unendlich kleiner Fläche.

Beispiel 2: ebener Winkel mit Querkraft

Der Kragträger erhält zusätzlich einen Schenkel und wird somit zum Winkel. Statt der punktförmigen Lagerung wird nun der gesamte obere Rand mit Symmetriebedingungen versehen.

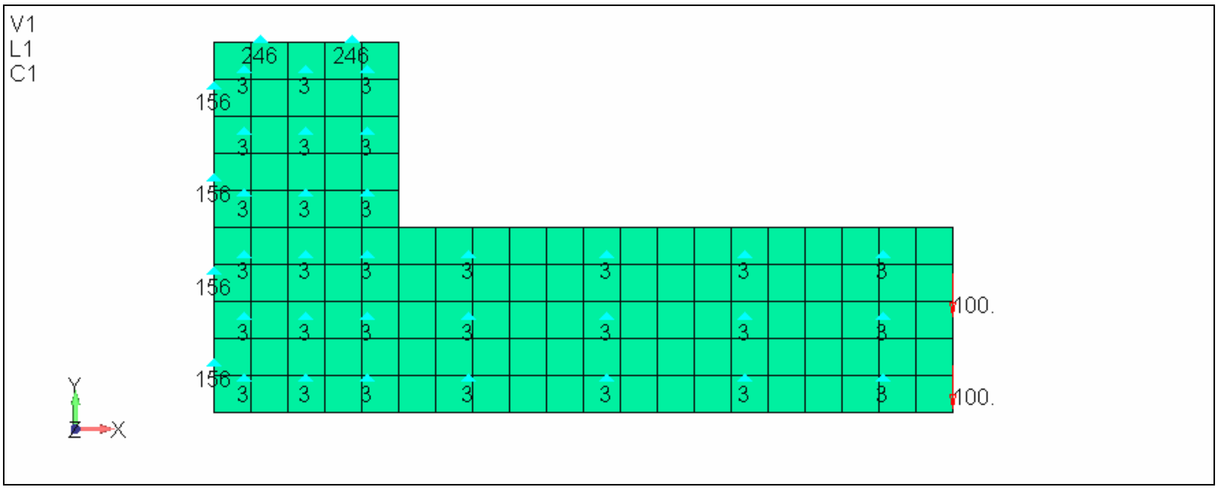

Abbildung 6: FE-Modell Winkel

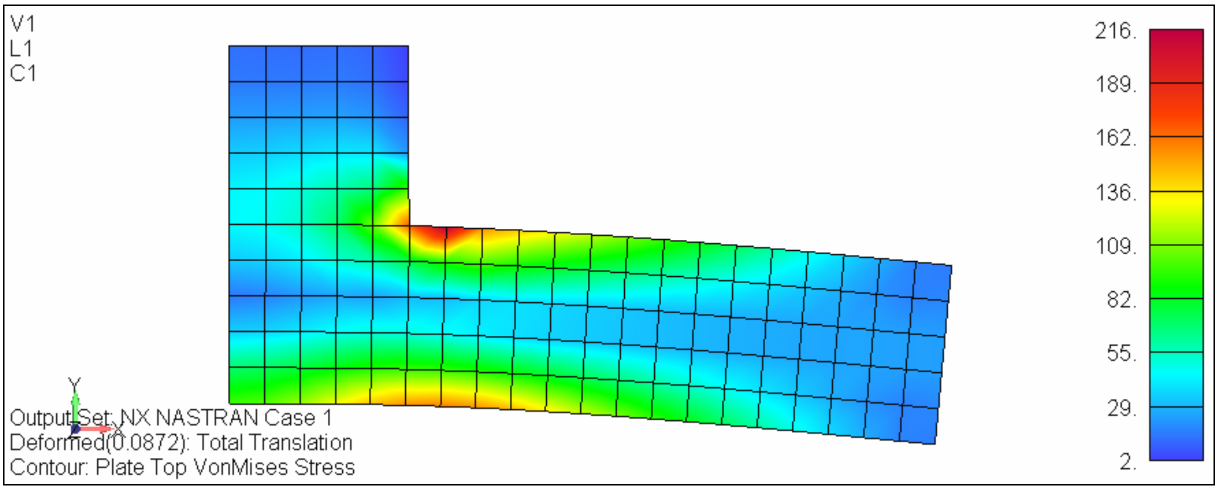

Abbildung 7: Winkel, Ergebnisse geringe Netzdichte (125 Elemente)

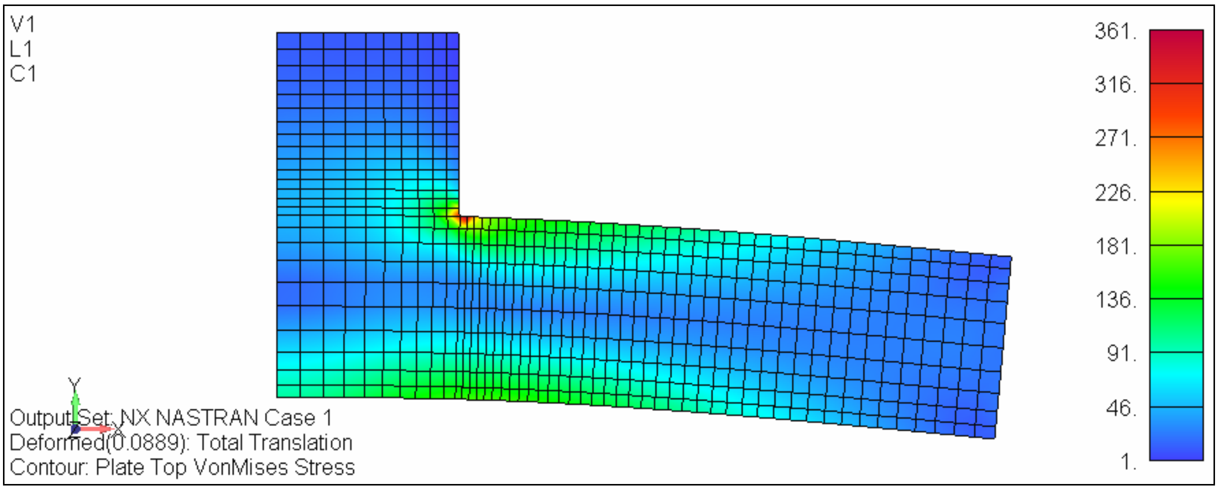

Abbildung 8: Winkel, Ergebnisse mittlere Netzdichte (650 Elemente)

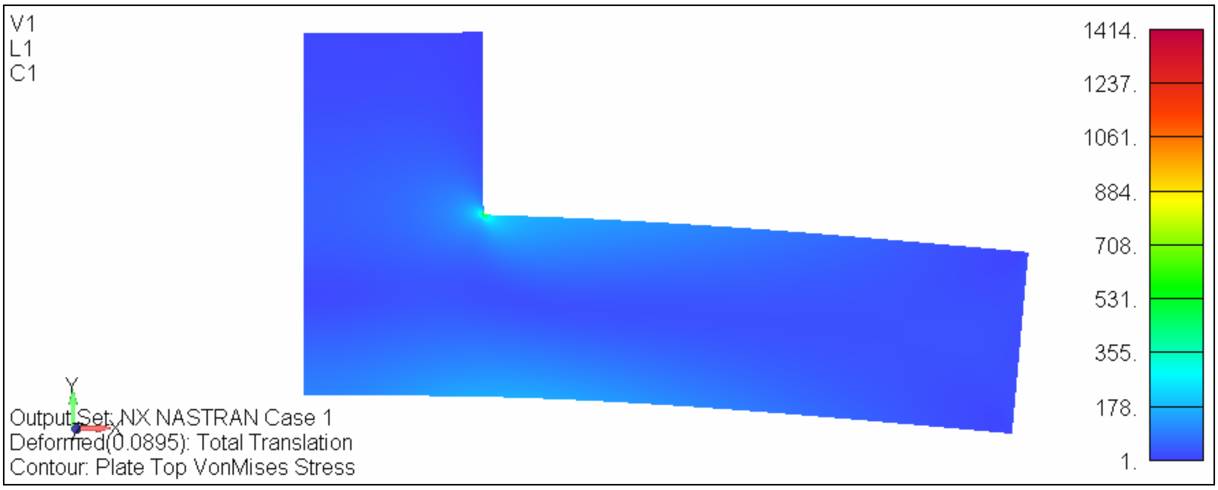

Abbildung 9: Winkel, Ergebnisse hohe Netzdichte (50.000 Elemente)

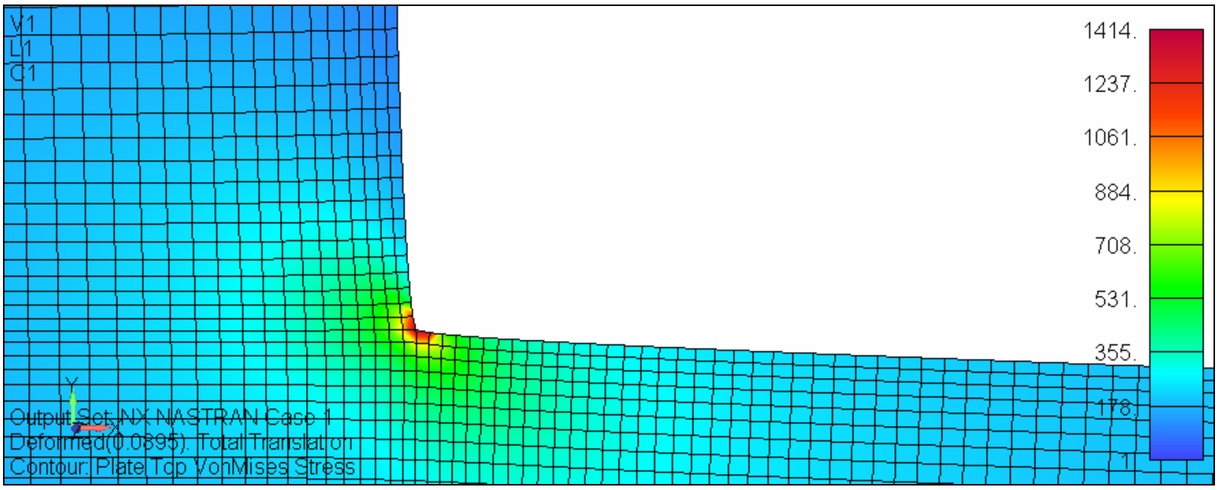

Abbildung 10: Detailansicht Winkel, Modell mit hoher Netzdichte

Auch bei diesem Modell konvergieren die Spannungen nicht und steigen umgekehrt proportional zu der Elementgröße. Zwar ist der Effekt nicht so krass wie im Kragträgermodell, da die benachbarten Bereiche der Ecke einen Teil der Querkraft aufnehmen, aber eine Bewertung der Spannungen in der Ecke ist nicht möglich.

Das tatsächliche Verhalten einer derartigen Struktur ist äußerst komplex und hängt von diversen Faktoren ab. Zum einen gibt es keine absolut scharfe Ecke, da jede Bearbeitung einen minimalen Radius hinterlässt. Zum anderen wird sich das Material nichtlinear verhalten, also plastisch Verformen und/oder es entstehen Mikrorisse.

Lösungsansätze

Bei einer statischen Beanspruchung bzw. geringen Lastwechselzahlen kann man in den meisten Fällen davon ausgehen, dass durch Plastifizierung, Umlagerung und Mikrorisse die Tragfähigkeit der Struktur erhalten bleibt. Die Bewertung über eine Betriebsfestigkeitsrechnung ist hingegen nicht möglich, hier hilft lediglich ein Versuch weiter.

Die Extrapolation der Spannungen der angrenzenden Knoten kann aus den oben genannten Gründen das reale Verhalten nicht wiedergeben. Es gibt zwar einige Arbeiten die sich mit dem Thema befassen und auch Lösungsansätze aufweisen [1, 2, 3], allerdings wird der Aufwand für die Umsetzung nur bei den wenigsten Konstruktionen zu vertreten sein.

Viele Singularitäten können bereits in der Konstruktionsphase durch eine praxisgerechte Gestaltung vermieden werden. Der Freistich ist ein hervorragendes Beispiel für die Umsetzung von harmonischen Übergängen.

Literaturverzeichnis:

[1] Eckensingularitäten bei räumlichen Problemen der Elastizitätstheorie: Numerische Berechnung und Anwendungen, Atanas Dimitrovau, Universität Karlsruhe, 2002

[2] Stress Singularities at sharp notches: Interpolation Formulars, N. Sukumar und M. Kumosa, Oregon Graduate Institute of Science & Technology, Department of Materials Science and Engineering, 1992

[3] Surface Singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates under bending, M.L. Williams, Illinois Institute of Technology, 1957

RB 14.05.10